Parabeln und Geraden mit Parameter

Aufgabe 1

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto -x^2 + 2x + k$; $D_f = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$
und $g : x \mapsto 2x + 1$; $D_g = \mathbb{R}$. Die Graphen werden mit G_{fk} bzw. G_g bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels von G_{fk} . Beschreiben Sie, wie die Graphen im Koordinatensystem verlaufen. (Zur Kontrolle: $f_k(x) = -(x-1)^2 + 1 + k$)

1.2 Bestimmen Sie k so, dass der Graphen G_{fk} seinen Scheitel auf der x-Achse hat. (Ergebnis: $k = -1$).
Bestimmen Sie dafür auch die Scheitelform des Funktionsterms.

1.3 Zeichnen Sie die Graphen G_{f3} für $k = 3$ und G_g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

1.4 Ermitteln Sie die Anzahl der Schnittpunkte des Graphen G_{fk} mit der x-Achse.

1.5 Kennzeichnen Sie den Zahlenbereich B im Koordinatensystem von Aufgabe 1.3, für den gilt: $f_3(x) \geq 2$.
Berechnen Sie B mit Hilfe der Linearfaktorzerlegung.

1.6 Bestimmen Sie die Anzahl der Schnittpunkte von G_{fk} und G_g in Abhängigkeit von k.

1.7 Zeichnen Sie diejenige Parabel der Parabelschar, für die G_g eine Tangente an den Graphen G_{fk} ist. ($k = 1$)

Aufgabe 2

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - kx + x + 2k$; $D_f = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitels von G_{fk}. (Z. Kontrolle: $f_k(x) = -\frac{1}{2}(x + k - 1)^2 + \frac{1}{2}(k+1)^2$)

2.2 Für welche Werte des Parameters k liegt der Scheitel im I. Quadranten ?

2.3 Ermitteln Sie die Anzahl und Lage der Schnittpunkte des Graphen G_{fk} mit der x-Achse (Sonderfall: $k = -1$).
Geben Sie die Linearfaktorzerlegung von $f_k(x)$ an.

2.4 Überprüfen Sie allgemein (zur Not auch an einem Zahlenbeispiel), ob die Nullstellen symmetrisch zur Abszisse des Scheitels liegen. Untersuchen Sie auch den Sonderfall $k = -1$.

2.5.0 Der Graph G_p einer zweiten quadratischen Funktion p ist eine nach oben offene Normalparabel mit den Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$

2.5.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x) in der Normalform. (Zur Kontrolle: $p(x) = x^2 - 7x + 10$)

2.5.2 Berechnen Sie den Scheitel und zeichnen Sie G_p.

2.5.3 Bestimmen Sie die Anzahl und die Abszissen der Schnittpunkte der beiden Graphen.
Berechnen Sie für den Fall, dass sich beide Graphen berühren, die Koordinaten des Berührpunktes.

Aufgabe 3

3.0 Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid 3)$, $B(6 \mid -1)$ und $S(0 \mid 3)$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm einer linearen Funktion g, deren Graph G_g durch die Punkte A und B verläuft. Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichnen Sie den Graphen G_g.

3.2.0 Der Graph G_{pk} einer Parabelschar $p_k(x)$ hat den Scheitel $S(0 \mid 3)$.

3.2.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p_k(x)$. Zeichnen Sie die Graphen für $k \in \{-1; 0; 1; 2\}$ ($p_k(x) = kx^2 + 3$)

3.2.2 Untersuchen Sie, für welche Werte von k Nullstellen von G_{pk} existieren.
(Überlegung und Rechnung !)

3.3 Ermitteln Sie die Anzahl der Schnittpunkte beider Graphen in Abhängigkeit von k. Zeichnen Sie G_{pk} für den Fall, dass sich beide Graphen berühren. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes. ($k = {}^{1}/_{16}$)

3.4 Bestimmen Sie k so, dass G_{pk} durch den Punkt $D(2 \mid 1)$ bzw. durch den Punkt $Q(0 \mid -5)$ verläuft.